數學傳播　48卷4期, pp. 53-59

多項式函數之質數值

何崇武

1. 緒論

本文所討論之多項式函數均屬下列形式: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 其係數 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ 均爲整數, 而變量 x 亦僅能爲正整數。我們將討論下述問題:

1. 我們能否找到此一函數其數值均爲質數?
2. 我們能否找到此一函數其數值包含所有質數, 或除有限例外之後的所有質數?
3. 如不能, 是否有函數其數值包含無窮多質數, 但亦有無窮多質數並非其數值?
4. 是否有這種函數其數值僅包含有限多個質數?
5. 是否有這種函數其數值完全不包含有任何質數?

2. 歐拉多項式

在作理論證明之前, 或許先看看例子, 作些計算。可能加深我們對問題的了解。1772 年大數學家歐拉 Euler 發現 $f(x)=x^2+x+41$ 有下列特性 (見 [1]): 當 x 等於 $0,1,\ldots,39$ 時, $f(x)$ 之值皆爲質數。可是當 x 等於 40 時 $f(40)=40^2+40+41=40\times 41+41=41^2$。這數值非質數。當 x 爲 41 時這多項式每一項均爲 41 之倍數, 因此也非質數。因爲這多項式有 x 從 0 到 39, 一連 40 個數字的值均爲質數的特性, 後人就把這多項式叫歐拉多項式。其實這多項式並不只前 40 個值是質數。當 x 等於 42, 43 時, $f(x)$ 之值又皆爲質數。嗣後 $f(45),\ldots,f(48)$ 四個數值又均爲質數 $\ldots$。我們可以計算出在從 0 到 80 之間只有當 x 爲 $40,41,44,49,56,65,76,$ 七個數字時, $f(x)$ 之值方爲複合數。其餘的 74 個數值均爲質數。這個多項式函數的數值, 當然不可能包含所有的質數。因爲小於 41 的質數, 已不能成爲這函數的數值。但是如除去這函數已跳過的有限多的質數之外, 這函數的函數值, 是否還能包含其他所有的質數 ? 我們將在下一小節中回答這一問題。

歐拉多項式本身也引起人們不少興趣, 上面所說在從 0 到 80 之間只有當 x 爲 40, 41, 44, 49, 56, 65, 76, 七個數字時, $f(x)$ 之值方爲複合數。而這七個數字又正好是 $x=40+n^2$ 以 $n=0,\ldots,6$ 的形式出現。並且當 $x=40+n^2$ 時, $f(40+n^2)=f(n-1)f(n)$ 這一複合數。這引起人們的好奇。是不是只有在 $x=40+n^2$ 時, $f(x)$ 方能成一複合數? 另一方面,

是不是凡是在 $x = 40 + n^2$ 時, $f(x)$ 均成爲一複合數? 第一個問題的答案是否定的。因爲當 $x = 81$ 時, $f(81) = 6683 = 41 \times 163$ 是一複合數, 而 81 並非是 $40 + n^2$ 的形式。第二個問題的答案是肯定的, 讀者不妨試證, 凡當 $x = 40 + n^2$ 時, $f(40 + n^2) = f(n-1)f(n)$ 這一複合數。故此我們可說有多項式函數, 其函數值包含無窮多個複合數。

是否有其他類似歐拉之多項式? 讀者可以驗證當 x 等於 $0, 1, \ldots, 9$ 時, $f(x) = x^2 + x + 11$ 之值皆爲質數。當 x 等於 $0, 1, \ldots, 15$ 時, $f(x) = x^2 + x + 17$ 之值亦皆爲質數。關於這方面, 也有不少人做過研究。一個二次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是否有此性質, 可以由他所生的域 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 來判別。此處 $D = b^2 - 4ac$ 爲二次式 $ax^2 + bx + c$ 之判別式。這對本文而言, 離題稍遠。此處從略。有興趣讀者可以參考資料 [2], [3]。

另一問題是有没有多項式, 能比歐拉多項式產生更長一串的質數? 關於這問題, 我們先指出歐拉多項式, 實際上有一連串 80 個質數。因爲當 x 等於 -1 到 -40 時, $f(x)$ 也是質數, 不過在這一段數值中, $f(x)$ 只是把歐拉多項式, 從 0 到 39 的數值重複一遍。這是因爲如 k 是任一整數時, 讀者可以很容易驗證 $f(-k) = f(k-1)$。故此歐拉多項式當 x 從 -40 到 $+39$ 之間有一串長達 80 個連續的質數值。我們知道若有一多項式函數 $f(x)$, 有一串長達 m 個質數值時, 我們就能夠用平移的方法, 使得這些質數值, 在 x 等於 0 與 $m-1$ 之間出現。在 1899 年 Escott 看到了這一點, 他用 $x - 40$ 代換 x 插入歐拉多項式, 得到 $f(x) = x^2 - 79x + 1601$。這函數當 x 爲 $0, 1, \ldots, 79$ 時, $f(x)$ 之值有一連 80 個質數 [4]。但是這只是歐拉多項式 的一個平移。大家多不認爲這是一個新的多項式。Ribenboim 即執此看法。他證明在所有多項式函數 $f(x) = x^2 + x + q$ 中, 能產生最長一串質數值的就是當 $q = 41$, 而不是 1601。見 [5, p. 200]。

3. 問題初探

我們現在回顧一下第一小節所列的問題。較爲複雜的問題, 我們在這小節內作一初步的探討。較簡易的問題, 我們予以解答。先看第一個問題: 我們能否找到一個多項式函數, 其數值均爲質數? 回答是當然可以。任一數值爲質數的常數的函數, 就是如此。但如果這函數方程式的次數 ≥ 1, 這答案似乎就不太明顯。在上一小節看到歐拉多項式必定有複合數值。下面一條定理告訴我們, 任何一個多項式函數亦均如此。

定理1: 設有一多項式函數 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, 此處 $n \geq 1$ 並且 $a_0 \neq 0$。則其函數值 $f(x)$ 必定有無窮多個非質數之數值。

證明: 因爲 $a_0 \neq 0$, 故 a_0 爲正或爲負。若爲負, 我們定可找到一變量值 x_0 使得凡當 $x > x_0$ 時 $f(x) < 0$。則此函數在 $x > x_0$ 時, 就没有質數值, 因爲質數需爲正整數。以下假設 a_0 爲正。當 x 不斷增加時, $f(x)$ 之值可以趨近於無窮大。故我們能找到一變量 x_1 使得 $f(x_1) > 1$。

以下我們將證明, 如一多項式函數在某點 x_1 之值 $f(x_1)=m>1$, 則 f 將在無窮多個正整數點 x, 其值 $f(x)$ 均爲 m 之倍數。這證明是利用同餘式的性質: 如 $a\equiv b \bmod (m)$, 則給予以任何一多項式 f, 我們可得到 $f(a)\equiv f(b) \bmod (m)$。回到我們原來的多項式函數。現在我們既然有在某點 x_1, $f(x_1)=m>1$, 而在任一正整數 k 之下, $x_2=x_1+km$ 又滿足 $x_2\equiv x_1 \bmod (m)$, 故此

$$f(x_2)\equiv f(x_1)=m\equiv 0 \bmod (m).$$

故在任一正整數 k 之下, 如 $x_2=x_1+km$, 則 $f(x_2)$ 亦爲 m 之倍數。但是這並不足以證明 f 有無窮多個複合數數值。因爲 m 自己亦爲 m 之倍數。如果 m 正好是一質數, 則這些 x_2 並非複合數。但 $f(x)$ 之首項係數爲正, 當 x 不斷增加時, $f(x)$ 之值可以趨近於無窮大。故此我們可以找到無窮多個 x_2, 使得 $f(x_2)$ 不但爲 m 之倍數, 並且爲大於 m 之倍數, 這樣即使 m 自己是一質數, 在這些 x_2 點的函數值, 也因此均非質數。 □

定理 1 不但回答了我們第一個問題, 並且回答了在首項係數爲負的情形下, 第四個問題。但如果多項式的首項係數爲正的情形下, 多項式的函數值, 是否也僅能有有限多個質數值? 答案仍爲肯定。例如 $f(x)=x^2-x+2$ 當 $x=1$ 時, $f(1)=2$ 是爲一質數。但當 x 爲其他正整數時 $f(x)$ 爲大於 2 之偶數。因而不可能成爲質數。故在首項係數爲正的情形下, 多項式的函數值, 也可以僅能有有限多個質數值。

第 1 節所列的五個問題中, 第 2, 3 兩問題稍微複雜。我們將在第四小節討論問題 2。在最後一小節討論問題 3。還剩下的問題 5 較爲簡單。我們很容易找到一些函數其數值不包含任何質數。例如 $f(x)=2x^2+4$ 又或是 $f(x)=x^2+x+6$。這些函數當 x 爲整數時, 其數值皆爲大於 2 之偶數, 故此不可能是質數。又如 $f(x)=(3x-1)(3x+1)$。當 x 爲正整數時, 其數值皆爲一複合數, 因此也不可能是質數。

4. 包含幾乎所有質數之函數

在這一小節中, 我們將討論問題 2。爲了避免行文過於累贅, 我們將用“幾乎所有的 $\cdots$”來代替 “除了有限多個之後所有的 $\cdots$”。故此問題 2 變成:「是否有多項式, 其數值包含幾乎所有質數」? 對於這問題答案顯然是肯定的。因爲當 c 爲任一常數時, $f(x)=x+c$ 的數值中就包括所有大於 c 的質數。但如果這多項式的次數大於 1 呢? 我們現在證明, 不可能有這種函數存在。在做此項證明之前, 我們先需要一條引理。

引理 1: 所有質數倒數之和 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}$ 爲一發散級數, 如這級數僅包括幾乎所有質數之倒數, 這級數亦爲爲一發散級數。

上面這條引理, 爲歐拉在 1737 年所發現 [6]。至今至少有六, 七種不同的證法。下面的證明是根據布朗大學教授 James Clarkson 在 1966 所給的一個證明 [7], 略加修飾而成。

證明: 如果 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}$ 爲一收斂級數, 我們定可找出一正整數 k 而使 $\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{p_i} < 1$。現使 $e=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{p_i}$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty}e^n$ 是一收斂級數。現設 $Q=p_1p_2\cdots p_k$。則在任何一正整數 n 之下, $(1+nQ)$ 不可能被任何一個質數 $p_1,p_2,\ldots,p_k$ 所除盡。換言之, 所有 $(1+nQ)$ 之質因子均爲 i 大於 k 之 p_i。我們因而可以斷言, 在任何一正整數 n 之下 $1/(1+nQ)$ 這數, 定爲級數 $\sum_{n=1}^{\infty}e^n$ 中之一項。這是因爲 $(1+nQ)$ 在分解因子之後, 只能有 i 大於 k 之 p_i 爲其因子, 例如 $(1+nQ)$ 有 3 個因子, 則 $1/(1+nQ)$ 必定爲 e^3 中的一項。因爲

$$e^3=\Big(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_{k+1}}+\frac{1}{p_{k+2}}+\cdots\Big)\Big(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_{k+1}}+\frac{1}{p_{k+2}}+\cdots\Big)\Big(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_{k+1}}+\frac{1}{p_{k+2}}+\cdots\Big)$$

展開之後凡是分母包含三個之因子之式, 均在此乘積中。並且不同正整數 n 之下, $(1+nQ)$ 有不同之分解因式 , 因而每一不同之 $1/(1+nQ)$ 也一定是在級數 $\sum_{i=1}^{\infty}e^i$ 中之一不同項。在此情形之下, $\sum_{n=1}^{\infty}1/(1+nQ)$ 僅是級數 $\sum_{n=1}^{\infty}e^n$ 中的一部份。故如 $\sum_{n=1}^{\infty}e^n$ 是一收斂級數, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}1/(1+nQ)$ 亦必爲一收斂級數。

另一方面由於 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(1+nQ)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+nQ}{n}=Q$ 爲一不等於零之常數。故級數 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 與級數 $\sum_{n=1}^{\infty}1/(1+nQ)$ 當同爲收斂或同爲發散。但我們知道 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 爲一發散級數。故 $\sum_{n=1}^{\infty}1/(1+nQ)$ 當亦爲一發散級數。但此結論與以上相矛盾。而此項矛盾是由於假設 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}$ 爲一收斂級數。故知 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}$ 必爲一發散級數。最後因爲僅變動一級數有限多個項, 並不影響這級數爲收斂或發散, 故如這級數僅包括幾乎所有質數之倒數, 這級數亦必爲一發散級數。 □

我們現在回到問題 2。

定理2: 設 $f(x)$ 爲一多項式函數。如 $f(x)$ 之次數大於一, 其數值即不可能包括幾乎所有質數。

證明: 如果有一次數大於一之多項式函數 $f(x)$, 其數值包括幾乎所有質數。我們將證明此假設當導致矛盾結論。現假設有此一 p 次之多項式函數

$$f(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_{p-1}x+a_p,$$

此處 $a_0\neq 0$, 而 $p>1$。我們可假設 $a_0>0$, 因爲如 $a_0<0$, 則 f 最多只能有有限多個正整數值, 故不可能包括幾乎所有質數。現假設 $a_0>0$, 我們可找到一整數 M 使得 $x>M\Rightarrow f(x)>0$。如有需要我們可以 $f(M+x)$ 以代 $f(x)$, 而假設 $f(x)$ 之值皆爲正數。因爲變動有限多個數值, 並不影響 $f(x)$ 數值包括幾乎所有質數之假設。

現在考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}1/f(n)$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n^p}{1/f(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^p}=a_0$ 爲一不等於零之常數, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$, 爲一收斂級數。故知 $\sum_{n=1}^{\infty}1/f(n)$ 亦爲一收斂級數。但如果 $f(n)$ 之數值包括幾乎所有質數, 而這些質數倒數之和, 僅爲此級數的一部份, 又因皆爲正數, 這些質數倒數之和, 又不能和別的項目相消。故此 $\sum_{n=1}^{\infty}1/f(n)$ 必定爲一發散級數。由於這矛盾我們可以認爲這定理爲真。 □

5. 僅包含無窮多質數值之函數

我們在這小節中討論第一小節中所列的問題 4: 是否有多項式函數, 其數值僅包括無窮多質數, 但亦有無窮多質數並非其數值? 我們先看一次多項式 $f(x) = ax + b$ 的函數。在上一小節中, 我們看到當 $a = 1$ 時, f 的數值包括幾乎所有質數。我們現在要討論當 $a \neq 1$ 時的情形。下面我們可以假設 $a > 1$, 因爲當 $a < 1$ 時, $a = 0$ 或 $a < 0$ 在這兩種情形之下, f 之值皆不可能包含無窮多個質數。我們也可以假設 b 不等於 0, 否則 f 之值皆爲 a 的倍數, 因此也不能包含無窮多個質數。

但當 $a > 1$ 及 $b \neq 0$ 時, $f(x) = ax+b$ 與 $f(x) = x+b$ 有一點很不相同, $f(x) = x+b$ 的數值包含幾乎所有的質數, 故此只有有限多個質數不能成爲 f 的數值。而我們將要證明, 當 $a > 1$ 時, $f(x) = ax + b$ 一定有無窮多個質數不能成爲 f 的數值。在本小節中, 如果有一函數其數值包括無窮多個質數, 但同時又有無窮多個質數不是這函數的數值, 我們就說這函數“僅有無窮多個質數值”。

定理 3: 設 $f(x) = ax + b$ 此處 $a > 1$, $b \neq 0$。並以 d 爲 a 與 b 之最大公因子。

1). 如 $d > 1$, $f(x) = ax + b$ 不能有任何質數值。

2). 如 $d = 1$ 及 $a = 2$ 則 $f(x) = ax + b$ 的數值包括幾乎所有質數。

3). 如 $d = 1$ 及 $a > 2$ 則 $f(x) = ax + b$ 的數值僅有無窮多個質數值。

證明: 如 $d > 1$, 在 x 爲任何整數情形下 $f(x) = ax + b$ 之值均爲 d 之倍數, 因而不能成爲質數。現假設 $d = 1$ 及 $a = 2$, 在此情形下, b 當爲一奇數。而 f 之函數值將包含大於 b 的所有奇數。故而其數值包括幾乎所有質數。

現在考慮 $d = 1$ 及 $a > 2$ 之情形。當 $x = 1, 2, \ldots$ 時 $f(x) = b + a, b + 2a, b + 3a, \ldots$ 這是一個等差數列。根據 Dirichlet 在 1873 年發表的定理 [8] (以及 [9, Chapter 7] 及 [10, 13.1] 兩處較現代的證明)。每一等差數列均包含有無窮多個質數, 並且這每一質數均在模數 a 之下與 b 爲同餘。故此 f 之函數值將包含無窮多個質數。另一方面因爲 $a > 2$, 我們可以找到另一與 b 不同餘之整數 c。而等差數列 $c + a, c + 2a, c + 3a, \ldots$ 也包括無窮多個質數。這些質數在模 a 之下與 c 同餘, 因此不與 b 同餘。故此這些無窮多個新的質數, 不包括在 f 之函數值内。 □

上述定理考慮到, 當這多項式爲線性時的種種可能。但如 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的次數大於一時, 情形又是如何? 在下列三種情形下, f 的值顯然不能包含無窮多個質數: 1) $f(x)$ 首項係數 a_0 爲負數, 2) $f(x)$ 可以分解爲兩多項式之積, 3) 當 x 爲整數時, $f(x)$ 之值有大於 1 的公因數。

上面第一及二種情形均好了解。如 $f(x)$ 首項係數 a_0 爲負數, $f(x)$ 之值頂多只能有有限多的質數。如果 $f(x)$ 可以分解爲兩多項式之積, 則 $f(x)$ 之值亦爲兩數之積, 除了一些可

以忽略的例外情形下, $f(x)$ 之值不能成爲質數。至於第三種情形, 如果 $f(x)$ 之值有大於 1 的公因數, $f(x)$ 之值均爲此公因數之倍數, 除少數例外 (當這倍數爲一時) 自不能成爲質數。但 $f(x)$ 有無窮多個值, 我們如何能夠確知, 這無窮多個值中有無公因子? 這要求不僅僅需要 $f(x)$ 所有係數沒有大於一的公因數, 而是 $f(x)$ 本身函數的值, 有沒有大於一的公因數。例如 $f(x) = x^2 + x + 2$ 的係數並沒有大於一的公因數。但 $f(x)$ 的數值皆爲偶數, 故有大於一的公因數。又例如 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ 之係數並沒有大於一的公因數, 但因爲

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2),$$

當 x 爲一正整數時, $f(x)$ 爲三個連續正整數之積, 三個連續正整數之中必定有個 3 的倍數, 因此 $f(x)$ 之數值也必有 3 之公因數。但在實際應用上, 我們只需找出兩個正整數 m 與 n 而證明 $f(m)$ 與 $f(n)$ 沒有公因數, 則 $f(x)$ 之數值也必沒有公因數。

假如 f 是一次數大於一多項式函數, 而又不屬於上述三種類型, 那 f 是否還能有無窮多個質數值? 俄國數學家 Buniakovsky 在 1857 年提出了下面一個猜想。

Buniakovsky **猜想**: 凡是不屬於上述三類之多項式, 且次數大於一之函數, 必定有無窮多個質數值。即 $f(x)$ 如爲一大於一次之多項式函數, 如其能滿足下列三個條件: 1) $f(x)$ 之首項係數爲正, 2) $f(x)$ 不能分解爲兩多項式之積, 3) 其變量 x 至少有兩處值 m 及 n 而使 $f(m)$ 與 $f(n)$ 沒有公因數, 則 $f(x)$ 之數值也必能有無窮多個質數值。

在 2008 年兩位保加利亞數學家 M. Vassilev-Missana 及 P. Vassilev 給了個猜想: 設 $f(x)$ 爲一 n 次之多項式函數, 此處 $n \geq 1$, 如果 $f(x)$ 之首項係數爲正, 並且 $f(x)$ 數值中包含至少 $n+1$ 個質數, 則 $f(x)$ 數值中將包含無窮多個質數值 (見 [11, Theorem 2])。他們這篇論文中, 把這結論稱之爲一項“假設性定理” (hypothetical theorem), 並且沒有給予任何證明, 故只能稱之爲一項猜想。這個猜想也是無人能夠證實。

許多數學家認爲, 證明一個一般性的論斷很難入手。不如集中精力, 從一個特殊情形入手。$f(x) = x^2 + 1$ 可算是一個次數大於一, 而又滿足 Buniakovsky 猜想三項條件之最簡單的多項式。不少人想集中精力, 探討這一多項式, 能否產生無窮多的質數 (見 [12, A1, p.4])。德國數學家 Edmund Landau 在 1912 年的國際數學家會議上, 提出四個未解決的同題。其中之一即爲 $f(x) = x^2 + 1$ 是否有無窮多個質數值。可惜這問題也是至今無人能解。

我們也來看看這問題。$f(x) = x^2 + 1$ 是否有無窮多個質數值, 這似乎可以從兩不同方向入手: 什麼樣的質數, 減去一以後可以變成一完整的平方? 或是什麼樣的平方, 加上一以後, 可以變成一個質數? 利用前者探討的人似乎不多。可能是因爲我們缺少質數的特徵的資料。我們現在嘗試一下後者的看法。如果 x 爲一大於一的奇數, 則 $f(x) = x^2 + 1$ 爲大於 2 的偶數, 因而不可能是質數。故我們可以集中精力探討 x 爲偶數的情形。讀者可以試算, 當 x 爲 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, 26, ... 這些數值時, $x^2 + 1$ 皆爲質數。故 $x^2 + 1$ 似乎能產生很多質數。

至於是否能產生無窮多個。我們並不知道。目前最好的結果是 1978 年 Henryk Iwaniec 發表的一篇論文 [13]。他證明 x 有無窮多個整數值, 可使 x^2+1 成爲質數或兩質數之積。此外前所討論的歐拉多項式 x^2+x+41 是否也能產生無窮多的質數值, 也是個至今未解的問題。讀者如有興趣可參考資料 [5], 尤其這書的第三章及第六章中之 I-III。資料 [2], [3] 及 [14] 也很有用。

作者感謝本期刊之編輯及審稿者之建議, 加入第 11 項之參考資料。

參考文獻

1. L. Euler, *Extrait d'une lettre de M. Euler le pere á M. Bernoulli concernant le Mémoire imprimé parmi ceux de* 1771 (1774) E461. English translation by Todd Douet available at `http://eulerarchive.maa.org`. See also, *Mém. de Berlin, année* 1772, 36, Comm. Arith. 1, 584.
2. N. Boston and M. L. Greenwood, Quadratics representing primes, *Amer. Math. Monthly*, 102(1955), No.7, 595-599.
3. D. Fendel, Prime-producing polynomials and principal idea domains, *Math. Magazine*, 58 (1985), No. 4, 204-210.
4. E. B. Escott, Réponses 1133, Formule d'Euler x^2+x+41 et formules analogues, *L'intermédiare des Math.*, 6(1899), 10-11.
5. P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.
6. L. Euler, Variae observations circa series infinitas, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 9(1737), 160-188.
7. J. Clarkson, On the series of prime reciprocals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 (1966), 541.
8. P. G. L. Dirichlet, Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthalt, *Abhandlungen der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 48(1837), 45-71.
9. T. M. Apostol, *Intro. To Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, Heibelberg, Berlin, 1976.
10. H. E. Rose, *A Course in Number Theory*, Oxford Science Publ., Clarendon Press, Oxford, 1988, 1994.
11. M. Vassilev-Missana and P. Vassilev, Note on polynomials taking infinitely many primes as their values, *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 14 (2008), No.4, 11-14.
12. R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.
13. H. Iwaniec, Almost-prime represented by quadratic polynomials, *Invent. Math.*, 47(1978), 171-188.
14. R. A. Mollin, Prime-producing quadratics, *Amer. Math. Monthly*, 104(1997), No. 6, 529-544.

—本文作者爲美國南伊里諾大學退休教授—